1781

De curvis triangularibus

Leonhard Euler

DE
CVRVIS TRIANGVLARIBVS.

Auctore

L. EVLER.

§. 1.

Curuas triangulares voco, quae tribus arcubus A B, A C et B C intus inflexis constant, qui in angulis A, B et C coeant, praeterea autem nullos alios ramos contineant. Huiusmodi ergo curuae vt sint continuae, siue quapiam aequatione, vel algebraica, vel etiam transcendente, exprimi queant, necesse est, vt in angulis A, B et C habeant cuspides acutissimas, vbi bini arcus coeuntes communi tangente sint praediti. Tales autem curuas innumerabiles exhiberi posse, tam algebraicas, quam transcendentes, iam olim ostendi, cum Problema de eiusmodi curuis, circa datum punctum lucidum describendis, proposuissem, ita vt omnes radii, a curua bis reflexi, iterum in ipsum punctum lucidum reuertantur, quod Problema variis solutionibus in Actis Lipsiensibus pro Annis 1746 et 1748 solutum reperitur. Hic enim tota Tab. I. Fig. 1.

 solutio

solutio ad inuentionem huiusmodi curuarum triangularium reducitur, quippe quibus causticae radiorum reflexorum formantur.

Tab. I. Fig. 2. §. 2. Praeter eum vsum autem, quem istiusmodi curuae triangulares in commemorato problemate catoptrico praestant, imprimis considerari merentur curuae, quae ex euolutione talis curuae triangularis A B C nascuntur. Hunc in finem vocemus longitudinem arcus $AB = c$, arcus $AC = b$ et arcus $BC = a$. Iam arcui AB concipiatur filum applicatum, quod extra A prolongetur vsque in F, ita vt sit $AF = f$, et stilus in F insertus promoueatur, donec arcus AB fuerit euolutus, et filum perueniat in situm Bg, eritque $Bg = AF +$ arcu $AB = f + c$; tum motus stili continuetur et filum B g successiue applicetur arcui $BC = a$, donec perueniat in H, eritque

$$BC + CH = Bg = f + c, \text{ vnde fit } CH = f + c - a;$$

quo cum fuerit peruentum, filum applicetur arcui CA; vbi notari conuenit, perinde esse, siue arcus CA maior sit, siue minor arcu CB; semper enim filum totum arcum CA occupare debet. Iam motus stili ex H continuetur in f, donec filum fA cuspidem A tangat, tum igitur erit

$$Af = CH + AC = f + c - a + b;$$

Nunc igitur filum motum Af successiue arcum AB inuoluet, donec perueniat in G, eritque

$$BG = Af - AB = f - a + b.$$

Iam filum ab arcu BA transferatur in arcum BC et euoluatur, donec perueniat in situm Cb, vbi erit

$$Cb = BG + BC = f + b.$$

Denique stilus ab b promoueatur inuoluendo arcum CA, hoc-

hocque modo reuertetur in ipsum punctum F, vbi motus est inceptus: erit enim $AF = Cb - CA$, ideoque $AF = f$; erat autem vtique $AF = f$.

§. 3. Hinc igitur patet, curuam, ex euolutione curvae triangularis ABC natam, esse curuam in se redeuntem, et tractu vniformi praeditam, scilicet $FgHfGbF$, si modo puncta F, H, G extra curuam ABC cadant. Atque hic ista insignis proprietas ante omnia se offert: quod rectae FAf, HCb et GBg non solum vtrinque ad curuam sint normales, vti ex natura euolutionis manifestum est, sed etiam, quod inter se sint aequales; est enim

$$FAf = AF + Af = 2f + c - a + b,$$

tum vero

$$ACb = CH + Cb = 2f + c - a + b,$$

simili modo

$$GBg = BG + Bg = 2f + c - a + b.$$

Verum haec proprietas multo latius patet. Si enim per quoduis punctum S nostrae curuae triangularis producatur vtrinque tangens XSx, ea etiam ex natura euolutionis vtrinque ad curuam descriptam erit normalis; tum vero erit

$$SX = CS + CH = f + c - a = CS,$$

deinde vero etiam erit

$$Sx = FA + AS = f + AS$$

hinc tota recta

$Xx = 2f + c - a + CS + AS = 2f + c - a + b$, ob $AS + CS = AC = b$, quocirca curua, ex euolutione curuae triangularis ABC nata, hac eximia gaudet proprietate: vt si ad eius punctum quodcunque X ducatur normalis, donec curuae iterum occurrat

currat in x, ea etiam in hoc puncto ad curuam sit normalis, ac praeterea tota hac recta Xx vbique eandem habeat longitudinem $= 2f + c - a + b$, quae proprietas vulgo circulo tam propria esse videtur, vt vix in alias lineas curuas competere posse videatur.

§. 4. Mirum hic sine dubio videbitur, quod terna latera figurae triangularis a, b et c non aequaliter in formulas inuentas ingrediantur. Ratio autem huius disparitatis in eo est sita, quod interuallum A F potius quam C H vel B G simplici litera f designauimus. Quo igitur hanc inaequalitatem euitemus, et vniformitatem in calculum introducamus, vocemus interuallum $AF = k + a$, ita vt sit $f = k + a$, atque omnes rectae supra exhibitae iam sequenti modo concinne exprimentur:

$$AF = k + a; \quad BG = k + b; \quad CH = k + c$$
$$Af = k + b + c; \; Bg = k + a + c; \; Ch = k + a + b$$

tum vero nunc longitudo omnium rectarum, per curuam descriptam normaliter ductarum, erit $= 2k + a + b + c$. Hic autem quantitatem k pro lubitu accipere licet, ita vt ex eadem figura triangulari innumerae curuae istius indolis describi possint. Quin etiam quantitas k adeo negatiue accipi poterit, dummodo formulae $k + a$; $k + b$ et $k + c$ positiuos obtineant valores; si enim haec interualla fierent negatiua, curua descripta non amplius prodiret circuli-formis, sed intra curuam A B C caderet, atque etiam tres cuspides g, f, h esset habitura, quemadmodum ex natura euolutionis facile colligere licet.

Tab. I. Fig. 3.

§. 5. Huiusmodi autem curuas, ex euolutione curuarum triangularium natas, quatenus cum circulo tam egregie

gregie conueniunt, breuitatis gratia *Orbiformes* nominemus, hicque ante omnia obseruasse iuuabit, ex qualibet curua orbiformi problema catoptricum supra memoratum infinitis modis facillime resolui posse. Sit enim FGH talis curua orbiformis quaecunque, intra qua punctum lucidum X pro lubitu constituatur; tum ducta recta quacunque Xx, ad curuam vtrinque normali, quae ergo constantem habebit magnitudinem, iungantur rectae LX et Lx, eaeque bisecentur in punctis O et o, vnde ad eas normaliter educantur rectae OZ et oz, rectae Xx occurrentes in punctis Z et z; haecque duo puncta sita erunt in curua quaesita. Radius enim LZ, primo reflexus, fiet Zz, qui, denuo reflexus in z, in ipsum punctum lucidum L remittetur, quemadmodum ex natura reflexionis haud difficulter demonstrare liceret, nisi hoc argumentum iam vberrime esset pertractatum. Tab. I Fig. 4

§. 6. Ob hunc insignem vsum curuarum triangularium vtique optandum esset, vt methodus certa pateret, cuius ope huiusmodi curuas triangulares, quotquot libuerit, inuestigare liceret, id quod primo intuitu nimis difficile videri potest. Verum hanc inuestigationem inuertamus, ac primo quaeramus curuas orbiformes, quales hactenus descripsimus; tum enim certi esse poterimus, earum euolutas huiusmodi fore curuas triangulares, quales desideramus. Praeterea vero etiam hoc modo istud commodum assequemur: vt, quoties curua orbiformis fuerit algebraica, toties quoque curua triangularis non solum fiat algebraica, sed insuper etiam rectificabilis, quandoquidem euolutae omnium curuarum algebraicarum simul rectificationem admittunt.

§. 7.

Tab. I. Fig. 5. §. 7. Sit igitur $FMfm$ talis curua orbiformis, qualem inuestigare nobis est propositum, in qua sumamus rectam Ff pro axe fixo, qui vtrinque ad curuam sit normalis, cuius longitudinem ponamus $Ff = 2f$. Tum ex puncto quocunque M ad curuam ducatur normalis Mm, quae ergo etiam in m ad curuam debet esse normalis, eiusque longitudo Mm itidem sit $= 2f$. Iam ex punctis M et m ad axem Ff demittantur perpendicula PM et pm, ac pro puncto M vocentur coordinatae $FP = X$ et $PM = Y$; at pro puncto m sit $Fp = x$ et $pm = -y$, quia haec applicata in partem contrariam cadit. His positis talis aequatio inter X et Y desideratur, vt, si loco X scribatur x, valor ipsius Y sponte prodeat $= -y$. Nisi enim hoc fieret, tota curua $FMfm$ non esset continua. Sequenti autem modo hae quatuor quantitates a se inuicem pendent: Cum interuallum PN sit subnormalis respectu puncti M, posito $dY = P\,dX$, erit haec subnormalis $PN = PY$, hincque normalis $MN = Y\sqrt{1+PP}$. Simili modo pro altero puncto m erit pN subnormalis retro posita; vnde sumto $dy = p\,dx$ erit $pN = -py$; hinc normalis $mN = -y\sqrt{1+pp}$. Quia igitur triangula PMN et pmN sunt similia, erit $P = p$. Porro quia nouimus esse $Mm = 2f$, ex m agatur axi parallela mS, ipsi MP productae occurrens in S, et similitudo triangulorum MNP et MmS dabit $MS = \frac{2f}{\sqrt{(1+pp)}}$ et $mS = \frac{2fp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Cum igitur sit

$$MS = MP + mp = Y - y \quad \text{et} \quad mS = Fp - FP = x - X$$

hinc colligitur

$$Y - y = \frac{2f}{\sqrt{(1+pp)}} \quad \text{et} \quad x - X = \frac{2fp}{\sqrt{(1+pp)}},$$

prae-

praeterea vero, vti iam notauimus, debet esse

$$\frac{dY}{dX} = P = p \text{ et } \frac{dy}{dx} = p.$$

§. 8. Cum igitur inuenerimus differentias coordinatarum $Y - y$ et $x - X$, statuamus earum summas $X + x = 2Q$ et $Y + y = 2R$, hincque singulas coordinatas adipiscemur ita expressas:

$$X = Q - \frac{fp}{\sqrt{(1+pp)}}; \quad Y = R + \frac{f}{\sqrt{(1+pp)}};$$

$$x = Q + \frac{fp}{\sqrt{(1+pp)}}; \quad y = R - \frac{f}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Hinc igitur differentiando erit

$$dX = dQ - \frac{f\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}};$$

$$dY = dR - \frac{fp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}};$$

$$dx = dQ + \frac{f\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}};$$

$$dy = dR + \frac{fp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cum igitur esse debeat $dY = p\,dX$ et $dy = p\,dx$, fiet

$$dR - \frac{fp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = p\,dQ - \frac{fp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} \text{ et}$$

$$dR + \frac{fp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = p\,dQ + \frac{fp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ex vtraque harum aequationum sequitur fore $dR = p\,dQ$, ideoque $R = \int p\,dQ$.

§. 9. Cum igitur omnibus conditionibus ſatisfecerimus, quantitas Q arbitrio noſtro permittitur, eiusque ergo loco functio quaecunque ipſius p accipi poterit, quae autem ita debet eſſe comparata, vt formula $p\,d\,Q$ integrationem admittat, ſiquidem curuas algebraicas deſideremus. Quoniam igitur pro coordinatis x et y inuenimus:

$$x = Q + \frac{fp}{\sqrt{(1+pp)}} \text{ et } y = R - \frac{f}{\sqrt{(1+pp)}}$$

exiſtente $R = \int p\,d\,Q$; pro alteris vero coordinatis X et Y fit

$$X = Q - \frac{fp}{\sqrt{(1+pp)}} \text{ et } Y = R + \frac{f}{\sqrt{(1+pp)}},$$

manifeſtum eſt, has ex illis naſci, ſi modo formulae radicalis $\sqrt{(1+pp)}$ ſignum immutetur. Quare cum haec formula per ſuam naturam ſit ambigua, priores formulae, pro x et y inuentae, poſteriores pro X et Y iam ſponte inuoluunt, ita vt eadem aequatio rationalis tam pro x et y quam pro X et Y neceſſario ſit proditura. Ad hoc autem neceſſe eſt, vt neque Q neque R eandem formulam $\sqrt{(1+pp)}$ inuoluant, quia alioquin etiam ſignum harum litterarum mutari oporteret. Hinc igitur iſta regula ſtatui poteſt: vt pro Q functio rationalis ipſius p accipi debeat.

§. 10. Vt autem curuas algebraicas obtineamus, quia eſſe debet $R = \int p\,d\,Q = p\,Q - \int Q\,d\,p$, ſtatuamus $\int Q\,d\,p = S$, denotante S functionem quamcunque rationalem ipſius p, eritque $Q = \frac{d\,S}{d\,p}$, hincque porro $R = \frac{p\,d\,S}{d\,p} - S$. Nunc igitur pro curuis orbiformibus ſequentes determinationes ambarum coordinatarum x et y exhibere poſſumus:

$$x = \frac{d\,S}{d\,p} + \frac{fp}{\sqrt{(1+pp)}}; \quad y = \frac{p\,d\,S}{d\,p} - S - \frac{f}{\sqrt{(1+pp)}};$$

vbi pro S functionem quamcunque rationalem ipſius p, vel ſaltem talem, accipere poſſumus, quae, dum formula $\sqrt{(1+pp)}$ eſt ambigua, eundem valorem retineat.

§. 11.

§. 11. Quia natura orbis, qualem consideramus, postulat, vt curua sit in se rediens, et nusquam in infinitum porrigatur, functio S ita comparata esse debet, vt neque abscissa x neque applicata y vnquam fieri possit infinita, quem in finem hanc functionem S tali fractioni:

$$\frac{\alpha + \beta p + \gamma p p + \delta p^3 + etc.}{A + B p + C p p + D p^3 + etc.}$$

aequari oportet, cuius denominator nullum habeat factorem simplicem realem; si enim factorem talem haberet, puta $p - n$, tum, sumto $p = n$, valor ipsius S fieret infinitus. Deinde summa potestas ipsius p in numeratore haud debet esse maior quam in denominatore; aliter enim, casu $p = \infty$, valor ipsius S iterum in infinitum excresceret. Praeterea vero etiam exponentes fracti ipsius p admitti quidem possent, ita tamen, vt nullum membrum ambiguum obtineat valorem, quia alioquin eidem valori ipsius p plures tam abscissae quam applicatae conuenire possent; hoc enim casu curua non post vnam reuolutionem, sed demum post duas pluresue in se rediret; tum autem eius euoluta non amplius foret curua triangularis, sed vel pentagona, vel heptagona, vel enneagona vel etc. id quod instituto nostro aduersatur.

§. 12. Ex hac constructione generali, in qua continentur omnes curuae orbiformes, et quidem simplices, quae post vnam reuolutionem in se redeunt, facile erit formulas elicere pro descriptione curuarum triangularium; cum enim euolutae harum curuarum orbiformium certe sint figurae triangulares, tantum opus est, vt in euolutas istarum curuarum inquiramus. Quia autem omnes illae curuae, pro quouis valore litterae f, ex euolutione eiusdem curuae triangula-

 ris

ris nafcuntur, littera f non in determinationem euolutae ingreditur; vnde in formulis noftris, pro x et y inuentis, partes, hanc litteram f inuoluentes, tuto omittere licebit; ficque pro hac inueftigatione habebimus tantum

$$x = \frac{dS}{dp} \text{ et } y = \frac{p\,dS}{dp} - S,$$

quam ob rem naturam euolutae, ex his valoribus oriundae, inueftigaffe fufficiet.

Tab. I. Fig. 6. §. 13. Sit igitur $FMfm$ talis curua, in qua fit abfciffa $FP = x = \frac{dS}{dp}$, applicata $PM = y = \frac{p\,dS}{dp} - S$, et ducta normali Mm erit fubnormalis

$$PN = py = \frac{pp\,dS}{dp} - pS$$

vnde fit recta

$$FN = \frac{dS}{dp}(1 + pp) - pS.$$

Ponamus nunc angulum $FNM = \Phi$, erit tang. $\Phi = \frac{1}{p}$, ideoque $p = \cot.\Phi = \frac{\cos.\Phi}{\sin.\Phi}$, vnde fit

$$\sin.\Phi = \frac{1}{\sqrt{(1+pp)}} \text{ et } \cos.\Phi = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}},$$

tum vero etiam $d\Phi = -\frac{dp}{1+pp}$. Quod fi iam breuitatis gratia ponamus $FN = v$, notum eft, centrum circuli, curuam in M ofculantis, fore in puncto U, ita vt fit

$$NU = \frac{dv \sin.\Phi}{d\Phi};$$

Cum autem, fumto elemento dp conftante, fit

$$dv = \frac{ddS}{dp}(1 + pp) + p\,dS - S\,dp \text{ et}$$

$$\frac{\sin.\Phi}{d\Phi} = -\frac{\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

erit recta

$$NU = -\frac{ddS}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} - \frac{p\,dS}{dp}\sqrt{(1+pp)} + S\sqrt{(1+pp)}$$

pro qua formula breuitatis ergo fcribamus r, ita vt fit $NU = r$.

§. 14.

§. 14. Inuento puncto U, quod erit in euoluta, quam quaerimus, inde ad axem ducamus perpendiculum U T, ac pro euoluta vocemus abſciſſam F T $= t$ et applicatam T U $= u$; erit autem:

$$N T = N U \operatorname{cof.} \Phi = \frac{p r}{\sqrt{(1+pp)}} \text{ et}$$

$$T U = N U \operatorname{fin.} \Phi = \frac{r}{\sqrt{(1+pp)}}$$

vnde, loco r valorem aſſumtum ſubſtituendo, conſequemur abſciſſam

$$t = F N + N T = \frac{dS}{dp} - \frac{p\,ddS}{dp^2}(1+pp);$$

tum vero applicatam

$$u = S - \frac{p\,dS}{dp} - \frac{ddS}{dp^2}(1+pp);$$

vnde colligimus

$$t - p u = \frac{dS}{dp}(1+pp) - p S.$$

Ope igitur harum formularum, quaecunque functio idonea ipſius p pro S accipiatur, tam abſciſſam F T $= t$ quam applicatam T U $= u$ aſſignare poterimus, quibus curua triangularis determinatur. Valores autem idoneos, pro S accipiendos, ſupra indicauimus.

§. 15. Quo hanc inueſtigationem exemplo illuſtremus, ſumamus

$$S = \frac{a p}{1+pp}, \text{ eritque}$$

$$\frac{dS}{dp} = \frac{a(1-pp)}{(1+pp)^2} \text{ et } \frac{ddS}{dp^2} = \frac{2ap^3 - 6ap}{(1+pp)^3}$$

vnde colligimus

$$t = \frac{a + 5app - 2ap^4}{(1+pp)^2} \text{ et } u = \frac{6ap}{(1+pp)^2}.$$

Hinc primo patet, ſiue p ſumatur poſitiue ſiue negatiue, abſciſſam t eandem manere, applicatam vero u hoc caſu in partem

 con-

contrariam cadere, vnde axis noster F T huius curuae erit diameter. Deinde, sumto $p = 0$ fiet $t = a$ et $u = 0$; at si capiatur p infinite paruum, fiet

$$t = a + 3\,a\,p\,p \text{ et } u = 6\,a\,p.$$

Porro, sumto $p = \frac{1}{2}$, erit $t = \frac{34}{25}\,a$ et $u = \frac{48}{25}\,a$; sin autem $p = 1$ erit $t = a$ et $u = \frac{3}{2}\,a$. Sit denique $p = \infty$, eritque $t = -2\,a$ et $u = 0$. Hinc patet, curuam huiusmodi figuram esse habituram, qualem in figura ei dedimus, ternas cuspides habentem, B, C, D, existente F D $= 2\,a$ et F A $= a$. Pro alteris cuspidibus B et C quaeratur locus, vbi applicata u sit maxima, et cum sit

Tab. I. Fig. 7.

$$d.\frac{p}{(1+pp)^2} = \frac{d\,p\,(1-3\,p\,p)}{(1+p\,p)^3}$$

hoc eueniet, vbi $3\,p\,p = 1$, siue $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$; tum autem fiet abscissa $t = \frac{11}{8}\,a$ et $u = \frac{9\sqrt{3}}{8}\,a$. Ergo ducta chorda B C, axem secante in E, erit F E $= \frac{11}{8}\,a$ et E B = E C $= \frac{9\sqrt{3}}{8}\,a$. Quod si iam quoque ducantur chordae B D et C D, ob D E $= \frac{27}{8}\,a$ erit B D$^2 = \frac{972}{64}\,a\,a$, vnde fit B D = C D $= \frac{9\sqrt{3}}{4}\,a$; ex quo patet, chordas omnes B D, C D et B C esse inter se aequales. Referet ergo haec curua triangularis triangulum aequilaterum.

Tab. I. Fig. 6.

§. 16. Accuratius autem in symptomata nostrae curuae triangularis inquiramus, et quoniam pro coordinatis F T $= t$ et T U $= u$ has inuenimus formulas:

$$t = \frac{d\,S}{d\,p} - \frac{p\,d\,d\,S}{d\,p^2}\,(1 + p\,p) \text{ et}$$

$$u = S - \frac{p\,d\,S}{d\,p} - \frac{d\,d\,S}{d\,p^2}\,(1 + p\,p)$$

primum obseruo, rectam N U esse tangentem curuae in puncto U, quae cum ad axem sit inclinata angulo T N U $= \Phi$, cuius cotangens est p, necesse est vt sit $\frac{d\,u}{d\,t} = $ tag. $\Phi = \frac{1}{p}$, vnde fit

$d\,t =$

$dt = p\,du$. Est vero per formulas

$$dt = -\frac{3\,p\,p\,d\,d\,S}{d\,p} - \frac{p(1+pp)\,d^3 S}{d\,p^2} \text{ et}$$

$$p\,du = -\frac{3\,p\,p\,d\,d\,S}{d\,p} - \frac{p(1+pp)\,d^3 S}{d\,p^2},$$

ideoque reuera $dt = p\,du$.

§. 17. Quia igitur est $dt = p\,du$, iisdem casibus, quibus fit $\frac{dt}{dp} = 0$, etiam fiet $\frac{du}{dp} = 0$; vnde patet, vbicunque abscissa t fuerit vel maxima vel minima, ibidem quoque fore applicatam maximam vel minimam, quae proprietas vtique in cuspides conuenit. Ex quo colligimus, vbicunque ambae coordinatae p et q simul fiunt vel maximae vel minimae, ibi quoque existere cuspides nostrae curuae; quare cum curua habeat tres cuspides, in tribus quoque locis tam t quam u maximum fieri necesse est.

§. 18. Imprimis autem hic notatu dignum occurrit, nostram curuam triangularem esse rectificabilem, quippe cuius arcus aequalis est radio osculi M U curuae orbiformis, vnde est nata. Vidimus autem esse Tab. I. Fig. 6.

$$NU = r = -\frac{d\,dS}{d\,p^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} - \frac{p\,dS}{dp}\sqrt{1+pp}$$
$$+ S\sqrt{1+pp}; \text{ at } MN = y\sqrt{1+pp}$$
$$= \frac{p\,dS\sqrt{1+pp}}{dp} - S\sqrt{1+pp},$$

vnde fit radius osculi

$$MU = -\frac{d\,dS}{d\,p^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}},$$

qui ergo longitudinem nostrae curuae triangularis exprimit; id quod etiam patet ex proprietate supra obseruata, quod sit $dt = p\,du$, vnde fit elementum curuae

$\sqrt{dt}$

$$\sqrt{dt^2 + du^2} = du\sqrt{1+pp} =$$

$$-\frac{3p\,d\,dS}{dp}\sqrt{1+pp} - \frac{d^3S}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}}$$

cuius integrale manifesto est

$$-\frac{d\,dS}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}}.$$

§. 19. Quoniam hic tantum curuas triangulares inuestigare instituimus, parum solliciti, vtrum sint rectificabiles nec ne, dummodo fuerint algebraicae: hac conditione omissa simpliciores formulas pro coordinatis t et u exhibere, atque adeo, sine vllo respectu ad curuas orbiformes habito, directe ex ipsa indole harum curuarum elicere poterimus. Cum enim esse debeat $dt = p\,du$, erit $t = \int p\,du = pu - \int u\,dp$. Iam statuamus $\int u\,dp = \Pi$, ita vt sit $u = \frac{d\Pi}{dp}$, vnde fit $t = \frac{p\,d\Pi}{dp} - \Pi$; vbi pro Π eiusmodi functiones ipsius p accipi debent, quae nullo casu fiant infinitae, quicunque valores literae t tribuantur, cuiusmodi functiones iam supra descripsimus; tum vero etiam hae functiones Π nulla signa radicalia, quae ambiguitatem inuoluant, inuoluere debent. Imprimis autem necesse est, vt ambae coordinatae t et u tribus casibus fiant maximae vel minimae, id quod eueniet, si, ob $u = \frac{d\Pi}{dp}$, haec aequatio: $\frac{d\,d\Pi}{dp^2} = 0$, tres habeat radices reales, neque vero plures.

§. 20. Sumamus exempli gratia $\Pi = \frac{a+bp}{1+fp+gpp}$, quae nullo casu fit infinita, si modo fuerit $ff < 4g$; tum autem erit

$$\frac{d\Pi}{dp} = \frac{b - af - 2agp - bgpp}{(1+fp+gpp)^2} = u$$

hincque

$t =$

$$t = \frac{-a - 2afp - 3agp^2 - 2bgp^3}{(1 + fp + gpp)^2}.$$

Vt iam ternas cuſpides definiamus, conſideremus aequationem $\frac{du}{dp} = 0$, quod quo facilius fieri poſſit ponamus

$$u = \frac{A + Bp + Cpp}{(1 + fp + gpp)^2},$$

ita vt ſit $A = b - af$; $B = -2ag$; $C = -bg$; tunc vero hinc reperitur ſequens aequatio:

$$B - 2Af + (2C - Bf - 4Ag)p - 3Bgpp - 2Cgp^3 = 0$$

cuius tres radices nobis ternas cuſpides monſtrabunt.

§. 21. Ponamus iam huius aequationis radices eſſe: I°. $p = \alpha$, II°. $p = \beta$ ac III°. $p = \gamma$, ſiue aequemus formulam inuentum huic producto:

$$2Cg(\alpha - p)(\beta - p)(\gamma - p)$$

quod euolutum praebet

$$2Cg\alpha\beta\gamma - 2Cg(\alpha\gamma + \alpha\gamma + \beta\gamma)p + 2Cg(\alpha + \beta + \gamma)pp - 2Cgp^3$$

quae forma, inuentae aequata, ſequentes tres producit determinationes:

$$\text{I}^{\circ}.\ B - 2Af = 2Cg\alpha\beta\gamma;$$

$$\text{II}^{\circ}.\ 2C - Bf - 4Ag = -2Cg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma);$$

$$\text{III}^{\circ}.\ -3Bg; = 2Cg(\alpha + \beta + \gamma);$$

ex quarum tertia ſit $B = -\frac{2}{3}C(\alpha + \beta + \gamma)$; ex prima vero

$$A = -\frac{1}{3f}C(\alpha + \beta + \gamma) - \frac{1}{f}Cg\alpha\beta\gamma,$$

qui valores in ſecunda ſubſtituti praebent

$$2C + \frac{(2ff + 4g)}{3f}C(\alpha + \beta + \gamma) + \frac{4g}{f}Cg\alpha\beta\gamma = -2Cg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

quae aequatio, per $\frac{3f}{2C}$ multiplicata, abit in hanc:

$$3f + (ff + 2g)(\alpha + \beta + \gamma) + 6gg\alpha\beta\gamma = -3fg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

haecque aequationes omnes continent determinationes, quibus noſtro propoſito ſatisfit.

§. 22. Antequam hanc determinationem in genere vlterius prosequamur, euoluamus casum specialem, quo

$\gamma = 0$ et $\beta = -\alpha$, vnde fit $\alpha\beta\gamma = 0$;

$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -\alpha^2$ et $\alpha + \beta + \gamma = 0$,

eritque postrema aequatio $3f = 3\alpha\alpha f g$, siue $f = \alpha\alpha f g$; vnde sequitur vel $f = 0$, vel $g = \frac{1}{\alpha\alpha}$. Consideremus primo casum $f = 0$, fietque $A = -\frac{0}{0}$, vnde littera A non determinatur, vel potius fit $A = 0$, porroque $B = 0$, vnde colligitur $b = 0$, siue etiam b non determinatur; tum vero erit $a = 0$. Quia autem aequationem postremam per f multiplicauimus, hic valor $f = 0$ lubricus est habendus. Sumamus igitur alterum valorem $g = \frac{1}{\alpha\alpha}$, et quia debet esse $ff < 4g$, sequitur esse debere $f < \frac{2}{\alpha}$; hinc vero fiet $A = 0$ et $B = 0$, ideoque $b - af = 0$, et $-2ag = 0$, vnde fit $a = 0$.

§. 23. Sufficiat autem haec in genere indicasse, et consideremus potius casum magis determinatum, sumendo

$$\Pi = \frac{bp}{\alpha\alpha + pp}, \text{ vnde fit } \frac{d\Pi}{dp} = u = \frac{b(\alpha\alpha - pp)}{(\alpha\alpha + pp)^2} \text{ et}$$

$$t = \frac{2bp^3}{(\alpha\alpha + pp)^2}.$$

Quod si iam pro cuspidibus faciamus $\frac{du}{dp} = 0$, nascitur haec aequatio: $p^3 - 3\alpha\alpha p = 0$, cuius ternae radices sunt

I°. $p = 0$; II°. $p = +\alpha\sqrt{3}$; III°. $p = -\alpha\sqrt{3}$;

pro quarum prima habebimus $t = 0$ et $u = \frac{b}{\alpha\alpha}$;

pro secunda:

$$t = \frac{3b\sqrt{3}}{8\alpha} \text{ et } u = -\frac{b}{8\alpha\alpha};$$

pro tertia vero:

$$t = -\frac{3b\sqrt{3}}{8\alpha} \text{ et } u = -\frac{b}{8\alpha\alpha},$$

vnde

vnde curua habebit formam in figura 8 delineatam, vbi eſt

$$FB = \frac{b}{\alpha\alpha},\ FG = FH = \frac{3b\sqrt{3}}{8\alpha} \text{ ac}$$ Tab. I. Fig. 8.

$$GC = HD = \frac{+b}{8\alpha\alpha},$$

ſicque ternae cuſpides erunt in punctis B, C, D, ac ductis chordis erit

$$BC = BD = \frac{3b\sqrt{3}(3+\alpha\alpha)}{8\alpha\alpha} \text{ et } CD = \frac{3b\sqrt{3}}{4\alpha};$$

ita vt haec figura triangularis triangulum iſoſceles exhibeat.

§. 24. Euoluamus ſimili modo caſum $\Pi = \frac{a}{\alpha\alpha+pp}$, vnde fit

$$\frac{d\Pi}{dp} = u = -\frac{2ap}{(\alpha\alpha+pp)^2}, \text{ hincque } t = -\frac{a(\alpha\alpha+3pp)}{(\alpha\alpha+pp)^2}.$$

Nunc pro cuſpidibus fiat

$$\frac{du}{dp} = -\frac{2a(\alpha\alpha-3pp)}{(\alpha\alpha+pp)^3} = 0,$$

quae aequatio tantum duas praebet radices

$$p = +\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \text{ et } p = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}};$$

tertia autem radix eſt $p = \infty$. Hinc igitur pro prima cuſpide, quae fit vbi $p = \infty$, fit $t = 0$ et $u = 0$, ſicque haec cuſpis B cadit in ipſum punctum F. Pro ſecunda cuſpide ſumatur Fig. 9.

$$p = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \text{ eritque } t = -\frac{9a}{8\alpha\alpha} \text{ et } u = -\frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}.$$

Pro tertia cuſpide fit

$$p = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \text{ erit } t = -\frac{9a}{8\alpha\alpha} \text{ et } u = +\frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}.$$

Sumto igitur $FG = \frac{9a}{8\alpha\alpha}$ binae reliquae cuſpides erunt in C et D, ita vt ſit $GC = GD = \frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}$, ideoque earum diſtantia

$$CD = \frac{3a\sqrt{3}}{4\alpha^3}, \text{ vnde colligitur}$$

$$BC = BD = \frac{3a\sqrt{9\alpha\alpha+3}}{8\alpha^3}$$

ſicque

ficque erit:

$$CD : BC = 2 : \sqrt{3\alpha\alpha + 1}$$

ex quo patet, cafu $\alpha = 1$ triangulum fore aequilaterum.

§. 25. Quod fi ergo ambo cafus praecedentes combinentur, ita vt ftatuatur $\Pi = \frac{a + bp}{\alpha\alpha + pp}$, tum tam abfciffa t quam applicata u aequabitur fummae ambarum praecedentium formularum, ita vt fit

$$t = \frac{2bp^3 - a(\alpha\alpha + 3pp)}{(\alpha\alpha + pp)^2} \text{ et } u = \frac{b(\alpha\alpha - pp) - 2ap}{(\alpha\alpha + pp)^2};$$

vnde fi pro cufpidibus inueniendis ponamus $\frac{du}{dp} = 0$, habebimus hanc aequationem:

$$2bp^3 - 6b\alpha\alpha p - 2a\alpha\alpha + 6app = 0, \text{ fiue } bp^3 + 3app - 3b\alpha\alpha p - a\alpha\alpha = 0,$$

cuius ergo ternas radices quaeri oportet, quod cum per regulam *Cardani* difficulter praeftetur, trifectione anguli vtamur, quem in finem fingamus effe $p = r + s\ \text{cof.}\ \Phi$, eritque

$$pp = rr + \tfrac{1}{2}ss + 2rs\ \text{cof.}\ \Phi + \tfrac{1}{2}ss\ \text{cof.}\ 2\Phi \text{ et}$$
$$p^3 = r^3 + \tfrac{2}{3}rss + (3rrs + \tfrac{3}{4}s^3)\ \text{cof.}\ \Phi + \tfrac{3}{2}rss\ \text{cof.}\ 2\Phi + \tfrac{1}{4}s^3\ \text{cof.}\ 3\Phi$$

quibus valoribus fubftitutis aequatio noftra transmutabitur in fequentem:

$$\begin{aligned}
&+ br^3 + 3brrs\ \text{cof.}\ \Phi + \tfrac{3}{2}brss\ \text{cof.}\ 2\Phi + \tfrac{1}{4}bs^3\ \text{cof.}\ 3\Phi\\
&+ \tfrac{3}{2}brss + \tfrac{3}{4}bs^3\ \text{cof.}\ \Phi + \tfrac{3}{2}ass\ \text{cof.}\ 2\Phi\\
&+ 3arr + 6ars\ \text{cof.}\ \Phi\\
&+ \tfrac{3}{2}ass - 3b\alpha\alpha s\ \text{cof.}\ \Phi\\
&- 3b\alpha\alpha r\\
&- a\alpha\alpha.
\end{aligned}$$

Nunc definiantur litterae r et s ita, vt membra intermedia,

dia, tam cos. Φ quam cos. 2Φ inuoluentia, seorsim euanescant, vnde hae duae aequationes oriuntur:

$$\text{I}^a.\ 3brrs + \tfrac{3}{4}bs^3 + 6ars - 3b\alpha\alpha s = 0;$$

$$\text{II}^a.\ \tfrac{3}{2}brss + \tfrac{3}{2}ass = 0;$$

ex quarum posteriore fit $r = -\frac{a}{b}$, qui valor in priore substitutus dat

$$\frac{3aas}{b} + \tfrac{3}{4}bs^3 - \frac{6aas}{b} - 3b\alpha\alpha s = 0,\ \text{vnde fit}$$

$$ss = \frac{4(bb\alpha\alpha + aa)}{bb},\ \text{ideoque}\ s = \frac{2\sqrt{(bb\alpha\alpha + aa)}}{b}.$$

Hi iam valores in nostra aequatione substituantur, fietque

$$\frac{2a^3}{bb} + 2a\alpha\alpha + \tfrac{1}{4}bs^3\ \text{cos.}\ 3\Phi = 0,$$

vnde fit

$$\text{cos.}\ 3\Phi = -\frac{8a(aa + bb\alpha\alpha)}{b^3 s^3} = -\frac{a}{\sqrt{(aa + bb\alpha\alpha)}}.$$

Quaeratur igitur angulus ω, cuius Cosinus fit

$$= -\frac{a}{\sqrt{(aa + bb\alpha\alpha)}},$$

qui Cosinus cum etiam conueniat angulis $-\omega$; $2\pi - \omega$; item $2\pi + \omega$, habebimus sequentes valores:

$$\text{I}^o.\ 3\Phi = \omega,\ \text{II}^o.\ 3\Phi = -\omega,\ \text{III}^o.\ 3\Phi = 2\pi - \omega,$$
$$\text{IV. et}\ 3\Phi = 2\pi + \omega;$$

vnde omisso secundo valore, quippe qui a primo non discrepat, tres valores pro angulo Φ erunt

$\text{I}^o.\ \Phi = \frac{1}{3}\omega$, $\text{II}^o.\ \Phi = 120^\circ - \frac{1}{3}\omega$ et $\text{III}^o.\ \Phi = 120^\circ + \frac{1}{3}\omega$;

quibus inuentis terni valores litterae p erunt

$$\text{I}^{us}.\ p = -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{(bb\alpha\alpha + aa)}}{b}\ \text{cos.}\ \tfrac{1}{3}\omega,$$

$$\text{II}^{us}.\ p = -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{(bb\alpha\alpha + aa)}}{b}\ \text{cos.}\ (120^\circ - \tfrac{1}{3}\omega),$$

$$\text{III}^{us}.\ p = -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{(bb\alpha\alpha + aa)}}{b}\ \text{cos.}\ (120^\circ + \tfrac{1}{3}\omega).$$

§. 26. His casibus euolutis reuertamur ad quaestionem nostram generalem, qua eiusmodi curuae triangulares quaeruntur, in quibus pro cuspidibus littera p ternos datos obtineat valores, scilicet: $p = \alpha$, $p = \beta$ et $p = \gamma$. Nunc autem primo ponamus breuitatis gratia $\alpha + \beta + \gamma = \zeta$; $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \eta$ et $\alpha\beta\gamma = \theta$, et tres aequationes adimplendae erunt

$$\text{I}^{\circ}.\ B - 2Af = 2Cg\theta.$$
$$\text{II}^{\circ}.\ 2C - Bf - 4Ag = -2Cg\eta.$$
$$\text{III}^{\circ}.\ -3Bg = 2Cg\zeta.$$

Cum igitur esset

$$A = b = af,\ B = -2ag \text{ et } C = -bg,$$

hinc ternae nostrae aequationes erunt

$$\text{I}^{a}.\ -ag - bf + aff = -bgg\theta$$
$$\text{II}^{a}.\ -3b + 3af = bg\eta$$
$$\text{III}^{a}.\ 3a = -b\zeta;$$

ex quibus statim ternos valores pro fractione $\frac{a}{b}$ nanciscimur, qui sunt:

$$\text{I}^{\circ}.\ \frac{a}{b} = \frac{f - gg\theta}{ff - g};\ \text{II}^{\circ}.\ \frac{a}{b} = \frac{g\eta + 3}{3f} \text{ et III}^{\circ}.\ \frac{a}{b} = -\frac{\zeta}{3}.$$

§. 27. Quod si iam horum valorum secundus et tertius inter se aequentur, prodibit $f = -\frac{g\eta + 3}{\zeta}$. Aequetur nunc primus valor etiam tertio, et erit

$$3f - 3gg\theta = -ff\zeta + g\zeta,$$

vbi, si loco f valor modo inuentus substituatur, prodibit

$$3g\eta - 3gg\zeta\theta = g\zeta\zeta - gg\eta\eta$$

quae aequatio per g diuisa dat

$$3\eta - 3g\zeta\theta = \zeta\zeta - g\eta\eta, \text{ vnde concluditur}$$

$g =$

$g = \frac{3\eta - \zeta\zeta}{3\zeta\theta - \eta\eta}$, hincque porro $f = \frac{\zeta\eta - 9\theta}{3\zeta\theta - \eta\eta}$.

§. 28. His valoribus inuentis denominator fupra affumtus $1 + fp + gpp$ hanc induet formam:

$$\frac{3\zeta\theta - \eta\eta + (\zeta\eta - 9\theta)p + (3\eta - \zeta\zeta)pp}{3\zeta\theta - \eta\eta},$$

in quo effe debet $ff < 4g$. Eft vero

$$ff = \frac{\zeta\zeta\eta\eta - 18\zeta\eta\theta + 81\theta\theta}{(3\zeta\theta - \eta\eta)^2} \text{ et}$$

$$4g = \frac{12\eta - 4\zeta\zeta}{3\zeta\theta - \eta\eta} = \frac{36\zeta\eta\theta - 12\zeta^3\theta - 12\eta^3 + 4\zeta\zeta\eta\eta}{(3\zeta\theta - \eta\eta)^2}$$

Neceffe igitur eft vt fit

$$\zeta\zeta\eta\eta - 18\zeta\eta\theta + 81\theta\theta < 36\zeta\eta\theta - 12\zeta^3\theta - 12\eta^3 + 4\zeta\zeta\eta\eta$$

quod fine dubio fponte euenit. Pro numeratore fumamus

$$a = -\frac{\zeta c}{3\zeta\theta - \eta\eta} \text{ et } b = \frac{3c}{3\zeta\theta - \eta\eta},$$

ita vt fractio pro Π affumenda fit

$$\Pi = \frac{-\zeta c + 3cp}{3\zeta\theta - \eta\eta + (\zeta\eta - 9\theta)p + (3\eta - \zeta\zeta)pp}.$$

Cum autem femper fit $\zeta\zeta > 3\eta$ et $\eta\eta > 3\zeta\theta$, concinnius hic valor ita exprimetur:

$$\Pi = \frac{\zeta c - 3cp}{\eta\eta - 3\zeta\theta + (9\theta - \zeta\eta)p + (\zeta\zeta - 3\eta)pp}.$$

§. 29. Quia pofitio axis penitus arbitrio noftro relinquitur, eum femper ita affumere licet, vt vnam cufpidem tangat, tum vero ibi fiet $p = \infty$, vnde folutio noftra non minus late patebit, etiamfi ponamus $\alpha = \infty$; tum vero erit

$$\zeta = \alpha,\ \eta = \alpha(\beta + \gamma) \text{ et } \theta = \alpha\beta\gamma;$$

hincque propterea

$$\eta\eta - 3\zeta\theta = \alpha\alpha(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma);$$

$$9\theta - \zeta\eta = 9\alpha\beta\gamma - \alpha\alpha(\beta + \gamma) = -\alpha\alpha(\beta + \gamma) \text{ et}$$

$$(\zeta\zeta - 3\eta) = \alpha\alpha - 3\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\alpha.$$

Suma-

Sumatur igitur $c = \alpha a$, vt numerator etiam per $\alpha\alpha$ fiat diuisibilis, eritque formula nostra

$$\Pi = \frac{a}{\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma) p + pp},$$

cuius denominator certe nullum habet factorem realem, nisi sit $\beta = \gamma$, quem casum autem ipsa rei natura respuit. Hoc autem valore pro Π assumto consequimur statim

$$u = \frac{d\Pi}{dp} = \frac{a(\beta + \gamma) - 2ap}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma) p + pp)^2} \text{ et}$$

$$t = pu - \Pi = \frac{-a(\beta\beta - \beta\gamma - \gamma\gamma) + 2a(\beta + \gamma)p - 3app}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma) p + pp)^2}.$$

§. 30. Vt iam hinc cuspides definiamus, pro prima cuspide ponamus $p = \infty$, eritque tam $t = 0$, quam $u = 0$. Pro secunda cuspide sumamus $p = \beta$, eritque abscissa

$$t = -\frac{a(2\beta - \gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \text{ et } u = -\frac{a}{(\beta - \gamma)^3}.$$

Pro tertia vero cuspide fiat $p = \gamma$, et erit

$$t = -\frac{a(\beta - 2\gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \text{ et } u = +\frac{a}{(\beta - \gamma)^3}.$$

Tab. II. Fig. 10. Hinc in figura erit $GB = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3}$,

$$AH = \frac{a(\beta - 2\gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \text{ et } HC = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3}.$$

§. 31. Ductis iam chordis AB, AC et BC erit

$$AB = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3} \sqrt{(2\beta - \gamma)^2 + 1} \text{ et}$$

$$AC = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3} \sqrt{(\beta - 2\gamma)^2 + 1}.$$

Pro tertia chorda BC cum sit

$$BC^2 = (BG + HC)^2 + GH^2 = \frac{4aa + aa(\beta + \gamma)^2}{(\beta - \gamma)^6}$$

hinc erit

$$BC = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3} \sqrt{4 + (\beta + \gamma)^2},$$

sicque tres istae chordae AB, AC et BC eandem inter se se tenebunt rationem, quam habent hae tres formulae radicales:

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1};\ \sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1};\ \sqrt{4+(\beta+\gamma)^2}.$$

Pro positione autem harum chordarum notetur esse tangens ang. $BAG = \frac{1}{2\beta-\gamma}$ et tang. ang. $CAH = \frac{1}{\beta-2\gamma}$; vnde colligitur tangens anguli BAC

$$= \frac{3\beta-3\gamma}{2\beta\beta-5\beta\gamma+2\gamma\gamma-1}.$$

Pro tertia chorda erit tang. anguli $AOC =$

$$\text{tang. } BOG = \frac{BG+CH}{GH} = \frac{2}{\beta+\gamma}.$$

Cum igitur sit $ABC = GOB - GAB$ erit

tang. $ABC = \frac{3\beta+3\gamma}{(\beta+\gamma)(2\beta-\gamma)}$. Denique, ob anguli COG tang. $=$ − tang. ang. $BOG = -\frac{2}{\beta+\gamma}$, quia est ang. $ACB = COG - CAO$, erit tang. $ACB = \frac{3\gamma-3\beta}{(\beta-\gamma)(\beta-2\gamma)-2}$.

§. 32. Statuamus exempli gratia $\beta = 2$ et $\gamma = 1$ eritque $AG = 3a$, et $AH = 0$, tum vero $GB = a$ et $HC = a$, vnde curua figuram habebit, qualis fig. 11. repraesentatur, in qua ergo si capiatur punctum quodcunque u, cuius coordinatae sunt AT et TU, erit Tab. II. Fig. 11.

$$t = \frac{3a-6ap+3app}{(3-3p+pp)^2} \text{ et } u = \frac{3a-2ap}{(3-3p+pp)}.$$

Hic in ramo AUC id punctum notatu est dignum, quod a recta AC maxime distat; hoc igitur manifesto ibi erit, vbi eius tangens ad axem est normalis, ideoque hoc loco erit $p = 0$; vnde fit $AT = \frac{1}{3}a$, quae est distantia maxima quaesita US, tum vero erit $TU = u = \frac{1}{3}a$. Quia porro tang. anguli $GAB = \frac{1}{3}$, in arcu AB id punctum a chorda AB maxime erit remotum, cuius tangens chordae AB est parallela; pro eo ergo reperitur $p = 3$, vn-

 de

de fit $AT = t = \frac{4}{3}a$ et $TU = u = -\frac{1}{3}a$. Ex hoc exemplo autem luculenter patet, quemadmodum omnes casus euolui conueniat; neque vero difficile erit, hinc eiusmodi curuas triangulares inuenire, quae dato triangulo ABC sint inscriptibiles, quandoquidem ex ratione laterum trianguli innotescit ratio harum formularum:

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1};\ \sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1};\ \sqrt{4+(\beta+\gamma)^2}.$$

§. 33. Sint terna latera AB, AC et BC inter se vt numeri A, B, C, ac ponatur

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1}=nA,\ \sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1}=nB \text{ et}$$
$$\sqrt{4+(\beta+\gamma)^2}=nC;$$

vnde sumtis quadratis fit

$$(2\beta-\gamma)^2=nnAA-1;\ (\beta-2\gamma)^2=nnBB-1 \text{ et}$$
$$(\beta+\gamma)^2=nnCC-4,$$

vnde fit

$$1^\circ.\ 2\beta-\gamma=\sqrt{nnAA-1};\ 2^\circ.\ \beta-2\gamma=\sqrt{nnBB-1} \text{ et}$$
$$\beta+\gamma=\sqrt{nnCC-4},$$

quarum prima dempta secunda praebet

$$\sqrt{nnAA-1}-\sqrt{nnBB-1}=\sqrt{nnCC-4},$$

ex qua aequatione quantitatem n definire oportet, qua inuenta reperietur

$$3\beta=\sqrt{nnAA-1}+\sqrt{nnCC-4} \text{ et}$$
$$3\gamma=\sqrt{nnCC-4}-\sqrt{nnBB-1};$$

quibus inuentis curua triangularis satisfaciens per formulas superiores facile determinatur; ex illa autem aequatione elicitur

$nn =$

$$nn = \frac{4(2AA + 2BB - CC)}{2AABB + 2AACC + 2BBCC - A^4 - B^4 - C^4}.$$

Vnde ſi trianguli, cuius latera ſunt A, B et C, area vocetur Δ, hic denominator erit $= 16\Delta\Delta$, ita vt ſit

$$nn = \frac{2AA + 2BB - CC}{4\Delta\Delta}.$$

Hoc autem valore inuento erit

$$\text{I. } \sqrt{nnAA - 1} = \frac{3AA + BB - CC}{4\Delta},$$

$$\text{II. } \sqrt{nnBB - 1} = \frac{3BB + AA - CC}{4\Delta} \text{ et}$$

$$\text{III. } \sqrt{nnCC - 4} = \frac{4AA - 2BB}{4\Delta};$$

ex his vero denique elicitur

$$3b = \frac{5AA - BB - CC}{4\Delta} \text{ et } 3\gamma = \frac{AA - 5BB + CC}{4\Delta},$$

ita vt iam omnia ſint determinata, quae ad ſolutionem huius problematis ſpectant. Propoſito ſcilicet quocunque triangulo rectilineo, ſemper curua triangularis deſcribi poteſt, cuius cuſpides in eius angulos incidant, et latera trianguli ſimul ſint chordae arcuum, quibus figura triangularis conſtat.

§. 34. Ecce igitur, Problematis, cui tota haec inveſtigatio erat deſtinata, concinnam ſolutionem ſubiungamus.

Problema.

Intra datum triangulum A B C curuam triangularem continuam et algebraicam inſcribere, cuius ſingulae cuſpides in ipſos angulos trianguli A, B et C incidant. Tab. II. Fig. 12.

Solu-

Solutio.

1°. Vocentur latera trianguli dati

$$BC = a,\ AC = c \text{ et } AB = b;$$

sitque area huius trianguli $= \Delta$, ita vt sit

$$16\,\Delta\Delta = 2\,aabb + 2\,aacc + 2\,bbcc - a^4 - b^4 - c^4,$$

siue

$$16\,\Delta\Delta = (a+b+c)\,(a+b-c)\,(a+c-b)\,(b+c-a);$$

tum singula latera trianguli bisecentur in punctis a, b et c et rectae Aa, Bb, Cc, quae se mutuo in centro grauitatis trianguli O intersecabunt, erunt tangentes curuae triangularis in suis cuspidibus A, B et C. Iam, sumta recta Aa pro axe, ponatur anguli BOa cotangens $= \beta$ et anguli COa cotangens $= -\gamma$, atque ex formulis ante inuentis, scribendo loco litterarum A, B et C has minusculas b, c et a, colligitur

$$\beta = \frac{5bb - aa - cc}{12\,\Delta} \text{ et } \gamma = \frac{aa + bb - 5cc}{12\,\Delta},$$

ita vt sit

$$\beta + \gamma = \frac{bb - cc}{2\,\Delta}.$$

II°. Nunc capiatur

$$\Pi = \frac{k}{\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma)\,p + pp},$$

vnde fiet

$$u = \frac{k\,(\beta + \gamma) - 2\,k\,p}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma)\,p + pp)^2};$$

tum vero

$$t = p\,u - \Pi = \frac{-k\,(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma) + 2\,k\,(\beta + \gamma)\,p - 3\,k\,pp}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta + \gamma)\,p + pp)^2},$$

vbi t et u sunt coordinatae pro curua triangulari quaesita. Sumto enim eius puncto quocunque U, indeque demisso in in axem Aa perpendiculo UT, erit $AT = t$ et $TU = u$. Tantum igitur ſupereſt, vt quantitas k ita determinetur, vt curua triangularis tota intra triangulum ABC cadat, ſimulque eius cuſpides in angulos ipſos A, B et C incidant; ſponte autem prima cuſpis in punctum A incidit, quia ſumto $p = \infty$ fit tam $t = 0$ quam $u = 0$.

III°. Pro ſecunda igitur cuſpide, quae in punctum B cadere debet, aſſumamus $p = \beta$, quo facto fiet

$t = \frac{-k(\beta-\gamma)(2\beta-\gamma)}{(\beta-\gamma)^4} = \frac{k(2\beta-\gamma)}{(\beta-\gamma)^3}$, et

$u = \frac{-k}{(\beta-\gamma)^3}$. Neceſſe igitur eſt vt fiat

$tt + uu = bb$, vnde fit

$\frac{kk(2\beta-\gamma)^2 + kk}{(\beta-\gamma)^6} = bb$, ideoque $k = \frac{b(\beta-\gamma)^3}{\sqrt{((2\beta-\gamma)^2+1)}}$.

IV°. Eſt vero

$$\beta-\gamma = \frac{2(bb+cc)-aa}{6\Delta} \text{ et } 2\beta-\gamma = \frac{5bb+cc-aa}{4\Delta},$$

hinc igitur erit

$$(2\beta-\gamma)^2 + 1 = \frac{2b^4 + 2bbcc - aabb}{4\Delta\Delta},$$

hinc

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1} = \frac{b\sqrt{(2bb+2cc-aa)}}{2\Delta},$$

quibus valoribus ſubſtitutis reperitur

$$k = \frac{(2bb+2cc-aa)^{\frac{5}{2}}}{108\Delta\Delta},$$

qua quantitate cognita adepti ſumus aequationem algebraicam pro curua triangulari, inſcribenda triangulo ABC, quam deſideramus.

Corollarium.

Ex tali autem curua triangulari facillime innumerabiles curuae orbiformes formari possunt. Positis enim coordinatis curuae orbiformis x et y, sumi poterit

$$x = u + \frac{ep}{\sqrt{(1+pp)}} \text{ et } y = t - \frac{e}{\sqrt{(1+pp)}},$$

quae ergo etiam erit algebraica; neque vero illa curua triangularis huius erit euoluta, sed potius cum omnibus his curuis orbiformibus communem habebit euolutam, quae itidem erit curua triangularis, simulque rectificabilis.

DE